KOMPLEKSNA ANALIZA

Pavle Pandžić, 5. predavanje

Lokalno uniformna konvergencija

U ovom dijelu kolegija najprije ćemo pokazati kako se holomorfne funkcije mogu zadati kao redovi potencija. Zatim ćemo vidjeti da se svaka holomorfna funkcija može razviti u Taylorov red oko svake točke domene.

Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : S \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija i $f : S \to \mathbb{C}$.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **po točkama** ili **obično** ako niz brojeva $(f_n(z))_n$ konverira k $f(z)$ za svaki $z \in S$. Drugim riječima, ako za svaki $z \in S$ te svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **uniformno na S** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$ i sve $z \in S$. Pišemo $f_n \rightrightarrows f$.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **lokalno uniformno na S** ako za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq S$ i da niz funkcija $(f_n|_{K(z,r_z)})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z,r_z)}$. Pišemo $f_n \overset{L.U.}{\longrightarrow} f$.

Teorem (karakterizacija lokalno uniformne konvergencije) Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. $f_n \overset{L.U.}{\longrightarrow} f$;
2. za svaki kompaktan podskup K od Ω vrijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$;
3. za svaki $\overline{K(z,r)} \subseteq \Omega$ vrijedi $f_n|_{\overline{K(z,r)}} \rightrightarrows f|_{\overline{K(z,r)}}$.

Dokaz. (1)⇒(2) Iz pretpostavke slijedi da za svaki $z \in \Omega$ postoji $r_z > 0$ tako da $(f_n|_{K(z,r_z)})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z,r_z)}$. Uočimo da je skup

$$\{K(z, r_z) : z \in K\}$$

otvoreni pokrivač kompaktnog skupa K, pa postoje $z_1, \ldots, z_k \in K$ tako da je

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i}).$$

Za svaki $i = 1, \ldots, k$ imamo da niz $(f_n|_{K(z_i,r_{z_i})})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z,r_z)}$, te stoga postoje $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ takvi da, za dani $\varepsilon > 0$, vrijedi:

$$n \geq n_i \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K(z_i, r_{z_i})).$$

Ako je $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ tada

$$n \geq n_0 \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})).$$

Kako je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})$, imamo

$$n \geq n_0 \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K).$$

Slijedi (2).

Ostale implikacije su očite. □

Teorem (o neprekidnosti lokalno uniformnog limesa) Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$. Tada je f neprekidna funkcija.

Dokaz. Uzmimo $z_0 \in \Omega$ i pokažimo da je f neprekidna u z_0.

Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo naći $\delta > 0$ tako da je $K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ i da za $z \in K(z_0, \delta)$ vrijedi $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Iz $f_n \xrightarrow{L.U.} f$ slijedi da postoji $r > 0$ tako da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i da $f_n|_{K(z,r)} \rightrightarrows f|_{K(z,r)}$, dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $z \in K(z_0, r)$. Posebno za $n = n_0$ imamo

$$|f_{n_0}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in K(z_0, r), \tag{1}$$

a uvrštavanjem $z = z_0$ u (1) slijedi

$$|f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Kako je f_{n_0} neprekidna u z_0, postoji $\delta \in (0, r]$ takav da je

$$|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in K(z_0, \delta). \tag{3}$$

Konačno, iz (1), (2) i (3) slijedi da je za svaki $z \in K(z_0, \delta)$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq$$
$$|f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \quad \square$$

Lema (o zamjeni limesa i integrala). Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$. Tada

$$\lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f$$

za svaki po dijelovima gladak put γ u Ω.

Dokaz. Neka je $\gamma : [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put u Ω. Označimo $K := \gamma([a, b])$. Neka je $\varepsilon > 0$.

Prema prethodnoj tvrdnji, f je neprekidna funkcija, pa je izraz $\int_\gamma f$ dobro definiran.

Kako je K kompaktan skup, iz pretpostavke o lokalno uniformnoj konvergenciji i Teorema o karakterizaciji lokalno uniformne konvergencije slijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$, pa za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in K. \tag{4}$$

Sada, koristeći Lemu o fundamentalnoj ocjeni integrala i (4), dobivamo

$$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| = \left|\int_\gamma (f_n - f)\right| \leq$$
$$\max\{|(f_n - f)(z)| : z \in K\} \cdot \ell(\gamma) \leq \varepsilon\ell(\gamma).$$

Slijedi tvrdnja. □

Sljedeća činjenica koju želimo dokazati je holomorfnost lokalno uniformnog limesa niza holomorfnih funkcija (Weierstrassov teorem, niže dolje). Za to će nam trebati

Morerin teorem. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da za svaki trokut $\Delta \subseteq \Omega$ vrijedi $\int_{\partial\Delta} f = 0$. Tada je f holomorfna na Ω.

Dokaz. Neka je $z_0 \in \Omega$ i $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$. Ako je $g = f|_{K(z_0,r)} : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$, tada iz pretpostavke slijedi $\int_{\partial\Delta} g = 0$ za sve $\Delta \subseteq K(z_0, r)$. Sada se na isti način kao u dokazu Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup dokaže da g ima primitivnu funkciju. (Ono što je bilo potrebno u tom dokazu je upravo da je integral po rubu trokuta jednak 0; tamo smo to zaključili iz holomorfnosti i Goursat-Pringsheimovog teorema, a ovdje nam je to pretpostavka.)

Dakle, postoji $G : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ tako da je $G'(z) = g(z)$ za sve $z \in K(z_0, r)$. Funkcija G je holomorfna na $K(z_0, r)$, pa je onda, prema generaliziranoj CIF, i $G' = g$ holomorfna na $K(z_0, r)$. Slijedi da je f holomorfna na $K(z_0, r)$, a zbog proizvoljnosti od z_0 slijedi tvrdnja. □

Weierstrassov teorem (o limesu niza holomorfnih funkcija) Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz holomorfnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$. Tada je $f \in H(\Omega)$ i

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{L.U.} f^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Prvo uočimo da je f neprekidna funkcija prema Teoremu o neprekidnosti lokalno uniformnog limesa. Kako su sve funkcije f_n holomorfne, prema Goursat–Pringsheimovom teoremu je

$$\int_{\partial\Delta} f_n = 0, \quad \forall\Delta \subseteq \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sada Lema o zamjeni limesa i integrala povlači da je

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \quad \forall\Delta \subseteq \Omega,$$

pa je f holomorfna po Morerinom teoremu.

Nadalje, neka je $k \in \mathbb{N}$. Za neki $z_0 \in \Omega$ neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K(z_0, r)} \subseteq \Omega$. Neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Prema generaliziranoj CIF za f_n i f imamo

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w - z)^{k+1}} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r), \forall n \in \mathbb{N},$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Primjenom leme o fundamentalnoj ocjeni integrala slijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\right| \cdot \left|\int_\gamma \frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw\right|$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \max\{\frac{|f_n(w)-f(w)|}{|w-z|^{k+1}} : w \in \gamma([0,2\pi])\} \cdot \ell(\gamma).$$

Neka je $\rho \in (0, r)$. Za sve $z \in K(z_0, \rho)$ vrijedi

$$|w-z| \geq |w-z_0| - |z-z_0| > r - \rho > 0,$$

pa je

$$\frac{1}{|w-z|^{k+1}} < \frac{1}{(r-\rho)^{k+1}}, \quad \forall z \in K(z_0, \rho).$$

Sada je

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{2r\pi k!}{2\pi(r-\rho)^{k+1}} \cdot \max\{|f_n(w)-f(w)| : w \in \gamma([0,2\pi])\}.$$

za sve $z \in K(z_0, \rho)$. Označimo li $M = \frac{2r\pi k!}{2\pi(r-\rho)^{k+1}} = \frac{rk!}{(r-\rho)^{k+1}}$, slijedi da za svaki $z \in K(z_0, \rho)$ vrijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq M \cdot \max\{|f_n(w)-f(w)| : w \in \gamma([0,2\pi])\}. \quad (5)$$

Neka je $K = \gamma([0,2\pi])$. Skup K je kompaktan, a $f_n \xrightarrow{L.U.} f$, pa zbog Teorema o karakterizaciji lokalno uniformne konvergencije slijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$. Dakle za proizvoljno odabrani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon, \quad \forall w \in K, \forall n \geq n_0.$$

Slijedi da je

$$\max\{|f_n(w)-f(w)| : w \in K\} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Iz (5) sada slijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \varepsilon M, \quad \forall z \in K(z_0, \rho), \forall n \geq n_0,$$

pa zaključujemo

$$f_n^{(k)}|_{K(z_0,\rho)} \rightrightarrows f^{(k)}|_{K(z_0,\rho)}.$$

Zbog proizvoljnosti od z_0 slijedi

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{L.U.} f^{(k)}. \quad \square$$

U daljnjem ćemo se prvenstveno baviti redovima funkcija. Ako je (f_n) niz funkcija definiranih na Ω, kažemo da red $\sum_n f_n$ konvergira lokalno uniformno na Ω ako niz parcijalnih suma

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

konvergira lokalno uniformno na Ω. Analogno se definira obična ili uniformna konvergencija reda funkcija.

Teorem (Weierstrassov M-test) Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija. Neka je $(M_n)_n$, $M_n \geq 0$, niz brojeva takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Ako vrijedi

$$|f_n(z)| \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega,$$

tada red funkcija $\sum f_n$ konvergira apsolutno i uniformno na Ω.

Dokaz. Iz $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n, z \in \Omega$, prema kriteriju uspoređivanja slijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ apsolutno konvergira za svaki $z \in \Omega$. Tada, za svaki $z \in \Omega$, red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ (obično) konvergira, te možemo definirati funkciju

$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Iz konvergencije reda $\sum_n M_n$ slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k>n} M_k < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$. Tada za sve $z \in \Omega$ i sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Slijedi uniformna konvergencija reda $\sum_{k=1}^{\infty}$ prema funkciji f. $\square$

Red potencija je red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{6}$$

gdje su $(a_n), n \in \mathbb{N}$, z i z_0 kompleksni brojevi. Pri tome z smatramo varijabilnim, a z_0 fiksiranim. Brojeve a_n zovemo koeficijentima reda (6).

Prvo je pitanje za koje $z \in \mathbb{C}$ red (6) konvergira. Kad odgovorimo na to pitanje, onda ćemo proučavati funkciju f definiranu sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Posebno, vidjet ćemo da ako red (6) konvergira na nekom otvorenom krugu, onda je funkcija $f(z)$ holomorfna na tom krugu.

Abelova lema
Neka je $z' \neq z_0$. Ako red brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z' - z_0)^n$ konvergira, tada red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno unifromno na $K(z_0, r)$, gdje je $r = |z' - z_0|$.

Dokaz. Nužan uvjet konvergencije reda brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z' - z_0)^n$ povlači da je $\lim_{n\to\infty} a_n(z' - z_0)^n = 0$. Zbog toga je niz $(a_n(z' - z_0)^n)_n$ ograničen, pa postoji $M > 0$ tako da je $|a_n(z' - z_0)^n| < M$ za sve $n \geq 0$.

Neka je $\rho \in (0, r)$. Tada za sve $z \in K(z_0, \rho)$ i za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z' - z_0)^n| \left(\frac{|z - z_0|}{|z' - z_0|} \right)^n < M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n.$$

Označimo $M_n = \left(\frac{\rho}{r}\right)^n$, $n \geq 0$. Tada je $\sum_n M_n$ geometrijski red kvocijenta manjeg od 1, pa ovaj red konvergira. Prema Weierstrassovom M-testu red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergira uniformno na $K(z_0, \rho)$. To vrijedi za svaki $\rho \in (0, r)$.

Neka je $z \in K(z_0, r)$. Tada postoji $\rho \in (0, r)$ takav da je $z \in K(z_0, \rho)$. Neka je $\delta > 0$ takav da je $K(z, \delta) \subseteq K(z_0, \rho)$. Prema dokazanom, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergira uniformno na $K(z_0, \rho)$, pa onda i na $K(z, \delta)$. Slijedi tvrdnja. $\square$

Abelova lema povlači da skup svih z za koje red (6) konvergira uvijek sadrži maksimalan otvoren krug $K(z_0, r)$ oko z_0, i možda još i neke točke ruba tog kruga. Pri tome prazan skup i cijeli $\mathbb{C}$ također smatramo otvorenim krugovima: prazan skup je otvoren krug radijusa 0, a $\mathbb{C}$ je otvoren krug radijusa $+\infty$. Kako nas zanimaju samo otvorene domene, za domenu funkcije zadane redom (6) uzimamo otvoren krug $K(z_0, r)$.

Sljedeći put ćemo vidjeti kako se radijus tog "kruga konvergencije" može izraziti pomoću koeficijenata a_n.